V. Classificazione delle algebre di Lie semisemplici

Avvertenza : Salvo esplicito avviso contrario , si suppone sempre che le algebre di Lie di cui si tratta sono definite su un campo F *algebricamente chiuso di caratteristica zero* .

Vogliamo provare che un'algebra di Lie semisemplice (su un campo algebricamente chiuso F di caratteristica zero) è determinata , a meno di isomorfismi , dal sistema di radici Φ associato a una sua qualsiasi decomposizione di Cartan .

In primo luogo , proveremo che il problema di classificare le algebre semisemplici mediante i loro sistemi di radici , può essere ridotto a quello di classificare le algebre semplici , mediante i loro sistemi (irriducibili) di radici .

1. Riduzione alle algebre semplici

Teorema 1. *Siano L un'algebra semplice , H una sua sottoalgebra torica massimale, e Φ il corrispondente sistema di radici . Allora Φ è irriducibile .*

Dim. Per assurdo , supponiamo che $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, $(\Phi_1 , \Phi_2) = 0$, sia una partizione ortogonale non-banale di Φ. E' chiaro che , se $\alpha \in \Phi_1$, $\beta \in \Phi_2$, allora $\alpha + \beta \notin \Phi$, dal momento che non è ortogonale né ad α né a β . Ne segue che , essendo (cfr. III.9. , Prop. 2) $[L_\alpha L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$, si ha $[L_\alpha L_\beta] = \underline{0}$. Se consideriamo la sottoalgebra M di L generata dai sottospazi L_α , $\alpha \in \Phi_1$, da ciò che precede segue che M è centralizzata da tutti i sottospazi L_β , $\beta \in \Phi_2$, e dunque , essendo $Z(L) = \underline{0}$, $M \subset L$. D'altra parte, M è certamente normalizzata dagli spazi L_α , $\alpha \in \Phi_1$, e dunque , poichè L è generata (come algebra di Lie) dagli spazi radicali (cfr. III.9. , D)) , si conclude che $N_L(M) = L$, ovvero che M è un ideale proprio di L , contro la semplicità di L .

Sia ora L una qualsiasi algebra semisemplice , e sia $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$ la sua decomposizione in somma diretta di ideali semplici L_i (cfr. III.4.) . Osserviamo innanzitutto che per ogni $x \in L$, se $x = \sum x_i$, $x_i \in L_i$, e si denotano con $(x_i)_s$ e $(x_i)_n$ rispettivamente la parte semisemplice e la parte nilpotente di x_i in L_i , allora $\sum (x_i)_s$ e $\sum (x_i)_n$ sono rispettivamente la parte semisemplice e la parte nilpotente di x in L (ciò si riconosce facilmente , tenendo conto del fatto che $\mathrm{ad}_{L_i} x_i = \mathrm{ad}\, x_i|_{L_i}$) . In particolare, se x è un

elemento semisemplice di L , ogni sua componente x_i è un elemento semisemplice di L_i.
Sia ora H una sottoalgebra torica massimale di L . Per quanto si è appena osservato , per ogni $h \in H$, ciascuna componente h_i di h è un elemento semisemplice di L_i , e dunque la proiezione $h \to h_i$ è un omomorfismo di H su una sottoalgebra torica H_i di L_i . Ne segue che :
1) la somma diretta $H_1 \oplus \cdots \oplus H_r$ è una sottoalgebra torica di L , e poichè ovviamente $H \subseteq H_1 \oplus \cdots \oplus H_r$, la massimalità di H implica necessariamente $H = H_1 \oplus \cdots \oplus H_r$ (e in particolare $H_i = H \cap L_i$) ;
2) per ogni $i = 1, \ldots, r$ H_i è una sottoalgebra *torica massimale* di L_i . Infatti, una sottoalgebra torica K di L_i che contenesse propriamente H_i , sarebbe ovviamente torica in L , centralizzerebbe ogni H_j , $j \neq i$, e dunque genererebbe con le H_j , $j \neq i$, una sottoalgebra torica di L contenente propriamente H , contro la massimalità di H .

Sia ora Φ il sistema di radici nello spazio euclideo E determinato dalla coppia (L,H) , e per ogni $i = 1, \ldots, r$ sia Φ_i il sistema di radici irriducibile nello spazio euclideo E_i determinato dalla coppia (L_i, H_i) . Ogni $\alpha \in \Phi_i$ può essere estesa a una forma lineare su H , ponendo banalmente $\alpha(H_j) = 0$ per $j \neq i$. Mediante tale identificazione , α risulta chiaramente una radice di L (relativa a H) il cui spazio radicale L_α è contenuto in L_i . Inversamente , per ogni $\alpha \in \Phi$ deve essere $[H_i L_\alpha] \neq \underline{0}$ per qualche i (in caso contrario L_α centralizzerebbe H , contro il fatto che H è autocentralizzante) , e dunque $[H_i L_\alpha] = L_\alpha$ (per l'unidimensionalità e la definizione stessa di L_α) , donde ancora $L_\alpha \subset L_i$. La restrizione di α a H_i è perciò una radice di L_i relativa a H_i (i.e. un elemento di Φ_i) , mentre $\alpha_{\mid H_j} = 0$ per $j \neq i$. (Per l'ultima parte dell'asserzione precedente , si osservi che , essendo $L_\alpha \subset L_i$, per ogni $h \in H_j$ $(j \neq i)$ e per ogni $0 \neq x \in L_\alpha$, si ha $[h\,x] = \alpha(h)x = 0$, da cui $\alpha(h) = 0$.)
Da ciò che precede si deduce allora che (identificando ogni $\alpha \in \Phi_i$ con la sua estensione a Φ) ogni sistema Φ_i si può considerare come un sotto-sistema del sistema di radici Φ , che $\Phi = \bigcup \Phi_i$, e che quest'ultima è la decomposizione (unica) di Φ nelle sue componenti irriducibili (cfr. IV.8. Proposizione 1) . (Si noti che se $\alpha \in \Phi_i$, $\beta \in \Phi_j$, con $i \neq j$, è $\alpha \perp \beta$ in E . Infatti (cfr. III.9. E)) $(\alpha , \beta) = \kappa(t_\alpha, t_\beta)$, e d'altronde , poichè (cfr. III.9.C) $t_\alpha \in H_i$ e $t_\beta \in H_j$, si ha $\kappa(t_\alpha, t_\beta) = 0$ in forza di III.4 . Dunque $E = E_1 \perp \ldots \perp E_r$.)

Riassumendo , abbiamo provato il seguente :

Teorema 2 . *Sia L un' algebra semisemplice , e sia $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$ la sua decomposizione in somma diretta di ideali semplici L_i . Sia H una sottoalgebra torica massimale di L , e sia Φ il sistema di radici nello spazio euclideo E determinato dalla coppia (L,H) . Allora $H_i = H \cap L_i$ è una sottoalgebra torica massimale di L_i , e la coppia (L_i , H_i) determina un sistema di radici irriducibile Φ_i in uno spazio euclideo E_i . Ciascun Φ_i si può identificare a un sotto-sistema di Φ , e previa tale identificazione , $\Phi = \bigcup \Phi_i$ è la decomposizione di Φ nelle sue componenti irriducibili (e $E = E_1 \perp \ldots \perp E_r$) .*

2. Il teorema d'isomorfismo

Siano L, L' due algebre di Lie semplici, H, H' due sottoalgebre toriche massimali di L, L' rispettivamente, e siano Φ, Φ' i sistemi di radici associati a H, H'. Ci proponiamo di provare che un isomorfismo tra Φ e Φ' induce un isomorfismo fra le algebre L e L' che manda H in H'. In forza della riduzione discussa nel paragrafo precedente, questo risultato si estende poi senza difficoltà alle algebre semisemplici.

Ci sono utili alcune osservazioni preliminari:

1) Iniziamo col ricordare che un isomorfismo tra Φ e Φ' è per definizione un isomorfismo f fra i corrispondenti spazi euclidei E, E' tale che $f(\Phi) = \Phi'$ e, per ogni $\alpha, \beta \in \Phi$, $< f(\alpha), f(\beta) > = < \alpha, \beta >$. In particolare, f conserva i rapporti fra le lunghezze delle radici, si ha cioè $(f(\alpha), f(\alpha))/(\alpha, \alpha) = (f(\beta), f(\beta))/(\beta, \beta) = \lambda$ (λ indipendente da α e β). Poichè se si moltiplica il prodotto interno definito in E o in E' per uno scalare positivo non si alterano gli assiomi che definiscono un sistema di radici, non si lede la generalità supponendo che sia $\lambda = 1$, cioè che f sia un'isometria fra E e E'.

2) Se f è un isomorfismo tra Φ e Φ', e Π è un sistema fondamentale in Φ, $f(\Pi)$ è un sistema fondamentale in Φ', e pertanto, essendo Π(risp. $f(\Pi)$) una base per H^* (risp. H'^*), l'applicazione $\alpha \to f(\alpha)$ si estende in modo unico a un isomorfismo ψ fra gli spazi H^* e H'^*. A sua volta ψ, sfruttando l'identificazione di H e H' con i loro duali H^* e H'^* mediante la forma di Killing (cfr. III.9, C)), induce un isomorfismo π da H a H'. Precisamente, π è l'isomorfismo definito ponendo, per ogni $\alpha \in \Phi$, $\pi(t_\alpha) = t'_{f(\alpha)}$ (ove, per ogni $\alpha' \in \Phi'$, $t'_{\alpha'}$ denota l'elemento di H' che corrisponde a α' nell'identificazione di H' con H'^*). In particolare, si osservi che, per ogni $\alpha \in \Phi$, $\pi(h_\alpha) = \pi(2t_\alpha/(\alpha, \alpha)) = 2t'_{f(\alpha)}/(f(\alpha), f(\alpha)) = h'_{f(\alpha)}$, dal momento che f è (per 1)) un'isometria.

Poichè H e H' sono algebre abeliane, π è di fatto un isomorfismo di algebre di Lie. Il nostro problema è quello di estendere π a un isomorfismo (che denoteremo ancora con π) fra L e L'.
Notiamo in primo luogo che, se un tale isomorfismo $\pi : L \to L'$ esiste, allora necessariamente per ogni $\alpha \in \Phi$ deve aversi $\pi(L_\alpha) = L'_{f(\alpha)}$. Infatti, essendo $L_\alpha = \{x \in L \mid [hx] = \alpha(h)x, \forall h \in H\}$, si ha $\pi(L_\alpha) = \{\pi(x) \in L' \mid [\pi(h)\pi(x)] = \alpha(h)\pi(x), \forall h \in H\}$. D'altra parte, ponendo per semplicità $f(\alpha) = \alpha'$ per ogni

$\alpha \in \Phi$, si ha per ogni α , $\beta \in \Phi$: $\alpha(t_\beta) = \kappa(t_\alpha , t_\beta) = (\alpha , \beta)$, $\alpha'(t'_{\beta'}) = \kappa(t'_{\alpha'} , t'_{\beta'}) = (\alpha' , \beta')$, donde $\alpha(t_\beta) = \alpha'(t'_{\beta'}) = \alpha'(\pi(t_\beta))$, dal momento che f proviene da un'isometria fra E e E' . Segue che $\alpha(h) = \alpha'(\pi(h))$ $\forall h \in H$, e dunque $\pi(L_\alpha) = \{\pi(x) \in L' \mid [\pi(h)\pi(x)] = \alpha'(\pi(h))\, \pi(x), \forall h \in H\} = L'_{\alpha'}$.
Si tratta quindi di definire l' isomorfismo $\pi : L \to L'$ assegnando , per ogni $\alpha \in \Phi$, a un elemento non-nullo x_α scelto in L_α un'immagine $x'_{\alpha'}$ in $L'_{\alpha'}$. La scelta di tale immagine non può essere in generale arbitraria , poichè se ad esempio si scelgono $x_\alpha \in L_\alpha$, $x_\beta \in L_\beta$ e $x_{\alpha+\beta} \in L_{\alpha+\beta}$ tali che sia $[x_\alpha x_\beta] = x_{\alpha+\beta}$, allora necessariamente dovrà essere $x'_{\alpha'+\beta'} = [x'_{\alpha'} x'_{\beta'}]$. Possiamo però scegliere indipendentemente le immagini di x_α al variare di α in un sistema fondamentale Π contenuto in Φ . E' allora opportuno provare il seguente :

Lemma 1 : *Siano L un'algebra di Lie semisemplice , H una sottoalgebra torica massimale di L , Φ il sistema di radici associato alla coppia (L , H) , e Π un sistema fondamentale contenuto in Φ . Allora L è generata , come algebra di Lie , dagli spazi radicali L_α , $L_{-\alpha}$ $(\alpha \in \Pi)$ (i.e. da arbitrari elementi non-nulli $x_\alpha \in L_\alpha$, $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ $(\alpha \in \Pi)$) .*

Dim. Abbiamo già notato in III.9, D) che gli spazi radicali L_α $(\alpha \in \Phi)$ generano L come algebra di Lie (ciò dipende dal fatto che $L = H \dot{+} \sum_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$, e $H = \dot{\sum}_{\alpha \in \Phi} [L_\alpha , L_{-\alpha}]$, poichè (cfr. III.9 Prop.3) per ogni $0 \neq x_\alpha \in L_\alpha$ esiste $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, tale che $[x_\alpha y_\alpha] = h_\alpha$) . D'altra parte , sappiamo anche che , se β è una qualsiasi radice positiva in Φ , si può scrivere β come somma di radici fondamentali : $\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ ($\alpha_j \in \Pi$, $1 \leq j \leq k$) , in modo tale che , per ogni $s \leq k$, sia $\alpha_1 + \dots + \alpha_s \in \Phi$. E' allora facile provare , per induzione su k , che lo spazio radicale L_β è contenuto nella sottoalgebra di L generata da tutti gli spazi L_α $(\alpha \in \Pi)$. (Ciò è ovvio se k = 1 , e supposto induttivamente che sia $L_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1}} \subseteq \langle L_\alpha \mid \alpha \in \Pi \rangle$, si ha $L_\beta = L_{\alpha_1 + \dots + \alpha_k} = [(L_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1}}) L_{\alpha_k}] \subseteq \langle L_\alpha \mid \alpha \in \Pi \rangle$, come si voleva .) In modo del tutto analogo si vede che, se $\beta \in \Phi^-$, L_β è contenuto nella sottoalgebra di L generata dagli spazi $L_{-\alpha}$ $(\alpha \in \Pi)$. Segue l'asserto .

Abbiamo già richiamato , nella dimostrazione del Lemma precedente , il fatto che , per ogni $\alpha \in \Phi$, e per ogni $0 \neq x_\alpha \in L_\alpha$, vi è un (unico) $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, tale che $[x_\alpha y_\alpha] = h_\alpha$. L'insieme $\{x_\alpha , y_\alpha , h_\alpha\}$ (cfr. ancora III.9 , Prop. 3) è una *base standard* per l'algebra $\langle x_\alpha , y_\alpha , h_\alpha \rangle = L_\alpha + L_{-\alpha} + [L_\alpha , L_{-\alpha}]$, isomorfa a sl(2,F) . Ciò giustifica la seguente :

Definizione 1. *L'insieme $\{x_\alpha , y_\alpha , h_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$, o anche l'insieme $\{x_\alpha , y_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$, si dirà un* **insieme standard di generatori** *dell'algebra semisemplice L .*

Torniamo ora al caso semplice , e enunciamo il teorema d'isomorfismo :

Teorema 1. *Siano L , L' algebre di Lie semplici ; H , H' sottoalgebre toriche massimali di L , L' rispettivamente ; Φ ,Φ' i corrispondenti sistemi di radici . Si supponga che esista un isomorfismo $f : \Phi \to \Phi'$, e , fissato un sistema fondamentale Π in Φ, si ponga $f(\Pi) = \Pi'$ e $f(\alpha) = \alpha'$ per ogni $\alpha \in \Pi$. Sia π l'isomorfismo fra H e H' indotto da f (e definito da $\pi(t_\alpha) = t'_{\alpha'}$) . Per ogni $\alpha \in \Pi$, si scelgano in modo arbitrario degli elementi non-nulli $x_\alpha \in L_\alpha$, $x'_{\alpha'} \in L'_{\alpha'}$ (con ciò scegliendo un arbitrario isomorfismo $\pi_\alpha : L_\alpha \to L'_{\alpha'}$). Allora esiste un unico isomorfismo $\pi : L \to L'$ che amplia l'isomorfismo $\pi : H \to H'$ e gli isomorfismi $\pi_\alpha : L_\alpha \to L'_{\alpha'}$ $(\alpha \in \Pi)$.*

Dim. Se un tale isomorfismo $\pi : L \to L'$ esiste , esso è certamente unico . Infatti , l'elemento x_α $(\alpha \in \Pi)$ determina univocamente l'elemento $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ tale che $[x_\alpha\, y_\alpha] = h_\alpha$. Poichè $[\pi(x_\alpha)\pi(y_\alpha)] = \pi(h_\alpha)$, ovvero $[x'_{\alpha'}\, \pi(y_\alpha)] = h'_{\alpha'}$, $\pi(y_\alpha)$ è necessariamente quell'unico elemento $y'_{\alpha'} \in L'_{-\alpha'}$ tale che $[x'_{\alpha'}\, y'_{\alpha'}] = h'_{\alpha'}$. L'unicità di π segue allora dal fatto che , in forza del Lemma 1 , gli elementi x_α e y_α generano L .

La dimostrazione dell'esistenza di π che qui riproduciamo , dovuta a D.J. Winter , è elegante benché alquanto indiretta .

Consideriamo l'algebra di Lie $M = L \oplus L'$, somma diretta di L e L' . M è un'algebra semisemplice i cui ideali semplici sono precisamente L e L' . In essa consideriamo la sottoalgebra "diagonale" D generata dagli elementi $\bar{x}_\alpha = (x_\alpha , x'_{\alpha'})$, $\bar{y}_\alpha = (y_\alpha , y'_{\alpha'})$, e $\bar{h}_\alpha = (h_\alpha , h'_{\alpha'})$ $(\alpha \in \Pi)$.
Ci proponiamo di provare che *D è una sottoalgebra propria di M* .

Ci serve , a tale scopo , la seguente :

Proposizione 1. *Sia Φ un sistema di radici irriducibile in uno spazio euclideo E , e sia Π un sistema fondamentale contenuto in Φ . Allora Φ contiene un'unica radice γ di altezza massima (rispetto a Π) . Posto $\gamma = \sum c_\alpha \alpha$ $(\alpha \in \Pi)$, tutti i coefficienti c_α sono strettamente positivi , e per ogni $\alpha \in \Pi$ si ha $(\gamma , \alpha) \geq 0$.*

Dim. Sia $\gamma = \sum c_\alpha \alpha$ $(\alpha \in \Pi)$ una radice di altezza massima . Ovviamente $\alpha \in \Phi^+$. Sia allora $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$, ove $\Pi_1 = \{\alpha \in \Pi \mid c_\alpha > 0\}$, $\Pi_2 = \{\alpha \in \Pi \mid c_\alpha = 0\}$. Supponiamo che sia $\Pi_2 \neq \varnothing$. Allora , per ogni $\delta \in \Pi_2$, abbiamo $(\gamma , \delta) = \sum c_\alpha (\alpha , \delta) \leq 0$ (poichè , per ogni $\alpha \neq \delta$, $(\alpha , \delta) \leq 0$ per IV.4 , Cor. 2) . Inoltre , essendo Φ irriducibile , vi è almeno un $\delta \in \Pi_2$ che non è ortogonale a Π_1 ; ciò implica che esiste $\delta' \in \Pi_1$ tale che $(\delta', \delta) < 0$, da cui $(\gamma , \delta) < 0$. Ma allora (cfr. IV.3 , Lemma 1) $\delta + \gamma \in \Phi$, contro il fatto che γ è di altezza massima . Dunque $\Pi = \Pi_1$, e tutti i coefficienti c_α sono positivi .

L'argomentazione testé svolta assicura di fatto che $(\gamma, \alpha) \geq 0$ per ogni $\alpha \in \Pi$ (e $(\gamma, \alpha) > 0$ per almeno un $\alpha \in \Pi$, essendo Π una base di E).
Sia ora $\gamma' = \sum c'_\alpha \alpha$ $(\alpha \in \Pi)$ un'altra radice di altezza massima. Tutto ciò che si è detto per γ vale per γ'. In particolare, vi è un $\alpha \in \Pi$ che appare con coefficiente positivo nell'espressione di γ' come combinazione lineare di Π, ed è tale che $(\gamma, \alpha) > 0$. Ne segue che $(\gamma, \gamma') > 0$, e pertanto $\gamma = \gamma'$, oppure $\gamma - \gamma' \in \Phi$. In quest'ultimo caso, possiamo supporre $\gamma - \gamma' = \sum (c_\alpha - c'_\alpha)\, \alpha \in \Phi^+$. Ne segue $c_\alpha - c'_\alpha \geq 0$, e $c_\alpha > c'_\alpha$ per qualche $\alpha \in \Pi$, contro il fatto che γ' è di altezza massima. Dunque γ è unica.

Torniamo ora alla dimostrazione del teorema d'isomorfismo.

Poichè L e L' sono algebre di Lie semplici, i sistemi di radici Φ e Φ' sono irriducibili (1. Teorema 1).
Dunque Φ (risp. Φ') contiene un'unica radice γ (risp. γ') di altezza massima rispetto al sistema fondamentale Π (risp. Π'). Ed è chiaro che $\gamma' = f(\gamma)$.
Scegliamo ora in modo arbitrario degli elementi non-nulli $x \in L_\gamma$, $x' \in L'_{\gamma'}$, poniamo $\bar{x} = (x, x') \in M = L \oplus L'$, e denotiamo con U il sottospazio di M generato da tutti gli elementi del tipo (*) $\mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_1} \mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_2} \ldots \mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_s}(\bar{x})$, con gli $\alpha_i \in \Pi$. Osserviamo che l'elemento $\mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_1} \mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_2} \ldots \mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_s}(\bar{x})$ appartiene a $L_{\gamma - \Sigma\alpha_i} \oplus L'_{\gamma' - \Sigma\alpha'_i}$, e pertanto l'intersezione di U con $L_\gamma \oplus L'_{\gamma'}$ è ridotta al sottospazio 1-dimensionale $< \bar{x} >$. In particolare, U è un sottospazio *proprio* di M.
Proviamo ora che *la sottoalgebra D normalizza U*, analizzandone l'azione sui generatori (*).
E' chiaro innanzitutto che ogni $\bar{y}_\alpha$ $(\alpha \in \Pi)$ preserva i generatori (*). Per induzione su s si vede poi che lo stesso avviene, a meno di multipli scalari, per ogni $\bar{h}_\alpha$ $(\alpha \in \Pi)$. Ciò è ovvio se s = 0. (Infatti : $[\bar{h}_\alpha\, \bar{x}] = ([h_\alpha\, x], [h'_{\alpha'}\, x']) = (\gamma(h_\alpha)x, \gamma'(h'_{\alpha'})x') = (<\gamma, \alpha>x, <\gamma', \alpha'>x') = <\gamma, \alpha>\bar{x}$.) Se $s > 0$, si osserva che $\mathrm{ad}\,\bar{h}_\alpha(\mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_1} \mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_2} \ldots \mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_s}(\bar{x})) = [\bar{y}_{\alpha_1} [\bar{h}_\alpha (\mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_2} \ldots \mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_s}(\bar{x}))] + [[\bar{h}_\alpha \bar{y}_{\alpha_1}]\, \mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_2} \ldots \mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_s}(\bar{x})]$ (per l'identità di Jacobi), donde per l'ipotesi induttiva, e tenendo del fatto che per ogni $h \in H$ $[h\, y_\alpha]$ è un multiplo di y_α (e similmente in L'), si ottiene $\mathrm{ad}\,\bar{h}_\alpha(\mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_1} \mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_2} \ldots \mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_s}(\bar{x})) = \mu\, \mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_1} \mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_2} \ldots \mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_s}(\bar{x})$ $(\mu \in F)$. Quanto all'azione di $\bar{x}_\alpha$ $(\alpha \in \Pi)$, si osservi che ad x_α commuta con ad y_δ, per ogni $\delta \in \Pi - \{\alpha\}$ (infatti $[x_\alpha y_\delta] \subseteq L_{\alpha-\delta} = \underline{0}$, dal momento che $\alpha - \delta \notin \Phi$; da cui $\mathrm{ad}\,[x_\alpha y_\delta] = [\mathrm{ad}\,x_\alpha\, \mathrm{ad}\,y_\delta] = 0$). Analogamente ad $x'_{\alpha'}$ commuta con ad $y'_{\delta'}$, per ogni $\delta' \in \Pi' - \{\alpha'\}$. Ne segue che, applicando ad $\bar{x}_\alpha$ a un generatore (*), possiamo spostarlo alla destra di ogni $\mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_i}$ salvo quando $\alpha_i = \alpha$. In quest'ultimo caso, effettuando la sostituzione $\mathrm{ad}\,\bar{x}_\alpha \cdot \mathrm{ad}\,\bar{y}_\alpha = \mathrm{ad}\,\bar{y}_\alpha \cdot \mathrm{ad}\,\bar{x}_\alpha + \mathrm{ad}\,[\bar{x}_\alpha\, \bar{y}_\alpha] = \mathrm{ad}\,\bar{y}_\alpha \cdot \mathrm{ad}\,\bar{x}_\alpha + \mathrm{ad}\,\bar{h}_\alpha$ viene (una o più volte) introdotto un ulteriore addendo della forma $\mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_1} \ldots \mathrm{ad}\,\bar{h}_\alpha \ldots \mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_s}(\bar{x})$, che peraltro, per quanto già detto sull'azione di $\mathrm{ad}\,\bar{h}_\alpha$, è ancora in U. Finalmente, osservando che $\mathrm{ad}\,\bar{x}_\alpha(\bar{x}) = 0$ (dal momento che $\alpha + \gamma \notin \Phi$ per la massimalità di γ, e similmente $\alpha' + \gamma' \notin \Phi'$), si conclude che U è chiuso rispetto a ad $\bar{x}_\alpha$.

A questo punto siamo in grado di affermare che D è effettivamente una sottoalgebra propria di M . Infatti , in caso contrario , U sarebbe un *ideale proprio* di M . Ma allora (cfr. III.4 , Corollario) dovrebbe essere $U = L$, oppure $U = L'$, contro il fatto che $\bar{x} \in U$.
Consideriamo ora le projezioni di D su L e L' , i.e. le applicazioni $p : (z,z') \in D \to z$; $p' : (z,z') \in D \to z'$. p e p' sono omomorfismi di algebre di Lie , e sono certamente suriettivi, poichè le projezioni in L , L' dei generatori $\bar{x}_\alpha$, $\bar{y}_\alpha$ di D generano L e L' , rispettivamente (in forza del Lemma 1) . Proviamo che p e p' sono di fatto *isomorfismi* . A tale scopo , supponiamo per assurdo che sia $\mathrm{Ker}\, p' = D \cap L \neq \underline{0}$. Sia dunque $(z , 0) \in D$, con $z \neq 0$. Allora anche ogni elemento della forma $(\mathrm{ad}\, z_{\alpha_1} \ldots \mathrm{ad}\, z_{\alpha_r}(z) , 0)$, con $z_{\alpha_i} = x_{\alpha_i}$ o y_{α_i} ($\alpha_i \in \Pi$) , appartiene a D . D'altra parte , gli elementi $\mathrm{ad}\, z_{\alpha_1} \ldots \mathrm{ad}\, z_{\alpha_r}(z)$ generano , sempre in forza del Lemma 1 , un ideale non-nullo di L , che ovviamente , per la semplicità di L , non può che coincidere con L stesso . Dunque si conclude che D contiene L . Per ragioni di simmetria , D conterrà anche L' (per via diretta : $(x_\alpha , x'_{\alpha'}) - (x_\alpha , 0) = (0 , x'_{\alpha'}) \in D$, etc.) . Donde $D = M$, il che non è .
Si conclude che p' (e similmente p) è un isomorfismo .
Finalmente osserviamo che , posto $\pi = p'p^{-1} : L \to L'$, π è l'isomorfismo che soddisfa le condizioni richieste , poichè manda , per ogni $\alpha \in \Pi$, x_α in $x'_{\alpha'}$ (e dunque estende π_α) , e h_α in $h'_{\alpha'}$ (e dunque estende $\pi : H \to H'$) .

Il Teorema 1 si estende immediatamente alle algebre semisemplici :

Siano infatti $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$, $L' = L'_1 \oplus \cdots \oplus L'_s$ algebre semisemplici ; H , H' sottoalgebre toriche massimali di L , L' ; Φ , Φ' i sistemi di radici corrispondenti ; $\Phi = \bigcup \Phi_i$, $\Phi' = \bigcup \Phi'_i$ le decomposizioni di Φ , Φ' nelle componenti irriducibili relative alle sottoalgebre $H_i = H \cap L_i$, $H'_i = H' \cap L'_i$. Se $\Phi \cong \Phi'$, si può evidentemente supporre , a meno di un eventuale riordinamento , $\Phi_i \cong \Phi'_i$. Segue allora dal Teorema 1 $L_i \cong L'_i$, e quindi $L \cong L'$.

Indipendenza di Φ dalla scelta di H :

Nella sezione precedente , si è provato che una coppia (L,H) , ove L è un'algebra di Lie semisemplice , e H è una sottoalgebra torica massimale di L , è determinata , a meno d'isomorfismi , dal sistema di radici Φ . A priori, si può pensare che , scegliendo un'altra sottoalgebra torica massimale H' in L , si possa ottenere un sistema di radici Φ' affatto diverso da Φ . In realtà ciò non accade . Si può infatti provare che due qualsiasi sottoalgebre toriche massimali di L sono immagini l'una dell'altra mediante un automorfismo di L , così che i corrispondenti sistemi di radici sono evidentemente isomorfi . Per una dimostrazione , svolta più in generale per le *sottoalgebre di Cartan* (= sottoalgebre nilpotenti autonormalizzanti) di un'algebra di Lie arbitraria (che coincidono con le sottoalgebre toriche massimali nel caso di un'algebra semisemplice su un campo F

algebricamente chiuso di caratteristica zero) , si rimanda a J.E. Humphreys "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory", sezioni 15 e 16 .

Definizione 2 . *Se L è un'algebra semisemplice sul campo F , che ammette , relativamente a una sua decomposizione di Cartan , un sistema di radici Φ, diremo che L è un'* **algebra di tipo Φ** .

3. Le algebre di Lie semplici

In questo paragrafo affrontiamo il problema della determinazione delle *algebre di Lie semplici su un campo F , algebricamente chiuso e di caratteristica zero* . Si tratta , basandoci sulla classificazione dei sistemi di radici irriducibili e sul teorema d'isomorfismo , di provare l'esistenza (ovvero di costruire effettivamente) per ogni sistema di radici Φ di tipo assegnato , un'algebra (semisemplice) di Lie su F di tipo Φ . Ci limitiamo tuttavia a trattare in maniera abbastanza esauriente le algebre di tipo $\mathbf{A_n}$, $\mathbf{B_n}$, $\mathbf{C_n}$, e $\mathbf{D_n}$ (che identificheremo alle *algebre classiche* , già introdotte in I. 2.) , e a fornire una delle possibili costruzioni dell'algebra di tipo G_2 .
Per la costruzione delle algebre di tipo F_4 e di tipo E_6 , E_7 , e E_8 , si rimanda ad es. a N. Jacobson , "Exceptional Lie Algebras", Marcel Dekker , N.Y. 1971 , ove vengono fra altre cose riprese le costruzioni introdotte da J. Tits negli anni '60 .

A) Un criterio per la semisemplicità di un'algebra di Lie

Sappiamo (cfr. III, 3.) che un'algebra di Lie è semisemplice se e solo la sua forma di Killing è non-degenere. E' però possibile formulare un criterio per la semisemplicità, che funziona nei casi che ci interessano, ed è più conveniente in pratica di quanto sarebbe il calcolo esplicito della forma di Killing. In vista di ciò, cominciamo col dare la seguente :

Definizione 1. *Un'algebra di Lie $L \neq \underline{0}$ si dice* **riduttiva** *se $Rad\, L = Z(L)$.*

Evidentemente ogni algebra abeliana è riduttiva, così come, all'estremo opposto, lo è ogni algebra semisemplice. Ma è riduttiva anche l'algebra generale lineare gl(n,F) (Si osservi che il radicale è contenuto in ogni sottoalgebra risolubile massimale di gl(n,F), dunque è contenuto sia nella sottoalgebra delle matrici triangolari alte che nella sottoalgebra delle matrici triangolari basse, e pertanto consiste di matrici diagonali. E' facile a questo punto verificare che se il radicale contenesse una matrice diagonale non-scalare non sarebbe chiuso rispetto al bracket.)

Possiamo provare la seguente :

Proposizione 1.

(i) Se L è un'algebra di Lie riduttiva, allora $L = [LL] \oplus Z(L)$, *e* $[LL]$ *è semisemplice, oppure* $[LL] = \underline{0}$ *, i.e. L è abeliana.*

(ii) Sia $\underline{0} \neq L \subseteq gl(V)$ *(V finito-dimensionale) un'algebra di Lie lineare, e si supponga che V sia un L-modulo irriducibile. Allora L è riduttiva, e la dimensione di* $Z(L)$ *è* ≤ 1. *Se in particolare* $L \subseteq sl(V)$, *allora L è semisemplice.*

Dim.

(i) : Supponiamo che L sia riduttiva e non-abeliana. Allora $L' = L/Z(L)$ è semisemplice. Poichè ad $L \cong L'$, via ad possiamo considerare L come L'-modulo. L è completamente riducibile in forza del teorema di Weyl, essendo L' semisemplice. In particolare Z(L) ha un complemento in L, i.e. esiste un ideale J di L tale che $L = J \oplus Z(L)$. Segue che $[LL] = [J\,J] \subseteq J$. D'altra parte, nella projezione canonica di L su $L' = L/Z(L)$, [LL] ha immagine l'intera L' (poichè, per la semisemplicità di L', $[L'L'] = L'$). Si conclude che $[LL] = J$, ovvero che $L = [LL] \oplus Z(L)$.

(ii) : Poniamo R = Rad L . Per il Teorema B in II.3., V contiene un autovettore comune a tutti gli elementi di R , i.e. un vettore v tale che $rv = \lambda(r)v$, per ogni $r \in R$. Per ogni $x \in L$, $r \in R$, si ha allora, essendo $[rx] \in R$:

$$(°) \quad r(xv) = \lambda(r)xv + \lambda([rx])v\ .$$

Poichè L opera irriducibilmente su V , il sottospazio $< Lv >$ generato dalle immagini di v mediante L coincide con V . Se allora fissiamo una base $\underline{b} = (v, x_1v, \ldots, x_{n-1}v)$ in V ($x_1, \ldots, x_{n-1} \in L$) , vediamo che , in forza di (°) , ogni $r \in R$ è rappresentato da una matrice triangolare alta con tutti gli elementi diagonali uguali a $\lambda(r)$. D'altra parte, ogni commutatore $[rx] \in R$ ha traccia nulla , ciò che forza $\lambda([rx]) = 0$. Si conclude che ogni $r \in R$ opera sullo spazio V come lo scalare $\lambda(r)$. In particolare R = Rad L = Z(L) , cioè L è riduttiva, e $Z(L) = \underline{0}$, oppure $Z(L) = F{\cdot}1_V$.
Infine , se L è una sottoalgebra di sl(V) , tutti i suoi elementi hanno traccia nulla , e quindi L non contiene scalari non-nulli (car F = 0!) . Dunque $R = \underline{0}$, ovvero L è semisemplice .

B) Le algebre classiche

In I.2. abbiamo introdotto e descritto le "algebre classiche" $\mathbf{A_n}$, $\mathbf{B_n}$, $\mathbf{C_n}$ e $\mathbf{D_n}$. In questa sezione (supponendo come sempre che il campo F sia algebricamente chiuso di caratteristica zero) vogliamo provare , usando il criterio introdotto in **A)** , che *le algebre classiche* A_n *(n ≥ 1),* B_n *(n ≥ 2),* C_n *(n ≥ 3), e* D_n *(n ≥ 4) sono semisemplici* , e anzi che sono *semplici* . Quest'ultimo punto sarà provato verificando che i loro sistemi di radici sono precisamente i sistemi (irriducibili) del tipo indicato . Con ciò si sarà contemporaneamente provato che , per ogni sistema di radici di tipo $\mathbf{A_n}$, $\mathbf{B_n}$, $\mathbf{C_n}$ e $\mathbf{D_n}$ esiste effettivamente un'algebra (semplice , e unica a meno d'isomorfismi) che ammette tale sistema di radici.

Innanzitutto , osserviamo che , poichè $gl(V) = sl(V) + F\cdot 1_V$, e $gl(V)$ opera irriducibilmente su V , lo stesso accade per $sl(V)$ (di fatto , $gl(V)$ e $sl(V)$ sono entrambe transitive su $V - \{\underline{0}\}$) . Con ciò resta provato , per il punto (ii) della Proposizione 1 , che

l'algebra speciale lineare $sl(V)$, i.e. l'algebra $\mathbf{A_n}$ *, è semisemplice .*

Per quanto riguarda le algebre di tipo $\mathbf{B_n}$, $\mathbf{C_n}$ e $\mathbf{D_n}$, si è già osservato in I.2. che sono tutte costituite da endomorfismi a traccia nulla , cioè sono sottoalgebre della corrispondente algebra speciale lineare $sl(V)$. Pertanto , per provare che sono semisemplici , basta verificare , ancora per la Proposizione 1 , che operano irriducibilmente sullo spazio V della loro rappresentazione naturale .
A tale scopo , ricordiamo (cfr. I.4.) che , se $L \subseteq gl(V)$ è una qualsiasi algebra di Lie lineare , e si denota con E_L l'algebra inviluppante di L (i.e. la sottoalgebra associativa di $End(V)$ generata da 1_V e da L) i sottomoduli di V , considerato come L-modulo , coincidono con i sottomoduli di V considerato come E_L-modulo . Pertanto , per provare che ciascuna delle algebre L di tipo $\mathbf{B_n}$, $\mathbf{C_n}$ e $\mathbf{D_n}$ opera irriducibilmente su V, basterà provare che , di fatto , la sua algebra inviluppante è l'intera $End(V)$.
Conviene , a questo fine , riprendere , per ciascuna delle algebre $\mathbf{B_n}$, $\mathbf{C_n}$ e $\mathbf{D_n}$, le basi standard esplicitamente descritte in I.2. :

$\mathbf{B_n}$: $\{ e_{1,n+i+1} - e_{i+1,1} , e_{1,i+1} - e_{n+i+1,1} \ (1 \le i \le n) , \ e_{ii} - e_{n+i,n+i} \ (2 \le i \le n+1) , \ e_{i+1,j+1} - e_{n+j+1,n+i+1} \ (1 \le i \ne j \le n) , \ e_{i+1,n+j+1} - e_{j+1,n+i+1} \ (1 \le i < j \le n) , \ e_{n+i+1,j+1} - e_{n+j+1,i+1} \ (1 \le j < i \le n) \}$

$\mathbf{C_n}$: $\{ e_{ii} - e_{n+i,n+i} \ (1 \le i \le n) , e_{ij} - e_{n+j,n+i} \ (1 \le i \ne j \le n) , e_{i,n+i} \ (1 \le i \le n) , e_{i,n+j} + e_{j,n+i} \ (1 \le i < j \le n , e_{n+i,i} \ (1 \le i \le n) , \ e_{n+i,j} + e_{n+j,i} + (1 \le i < j \le n) \}$

$\mathbf{D_n}$: $\{ e_{ii} - e_{n+i,n+i} \ (1 \le i \le n) , \ e_{i,j} - e_{n+j,n+i} \ (1 \le i \ne j \le n) , \ e_{i,n+j} - e_{j,n+i} \ (1 \le i < j \le n) , \ e_{n+i,,j} - e_{n+j,i} \ (1 \le j < i \le n) \}$

Ora , è chiaro che $E(L)$ contiene gli scalari , poichè contiene 1_V . Si vede poi senza difficoltà , considerando , per ciascun tipo di algebra , le basi standard sopra riportate , che per somme e ordinari prodotti (tenendo conto delle solite relazioni $e_{ij} e_{kl} = \delta_{jk} e_{il}$) si ottengono dalle matrici diagonali che stanno in L tutte le possibili matrici diagonali , ovvero tutti gli endomorfismi diagonali di V . Infine , si può verificare che facendo il prodotto di vari altri elementi della base standard di L per elementi diagonali di tipo e_{ii} , si ottengono tutti gli elementi e_{ij} , con $i \ne j$, e quindi $E_L = End(V)$.

Conclusione : *le algebre classiche* $\boldsymbol{A_n}$ *,* $\boldsymbol{B_n}$ *,* $\boldsymbol{C_n}$ *e* $\boldsymbol{D_n}$ *sono semisemplici .*

Dalla descrizione delle algebre classiche svolta in I.2. possiamo in realtà ricavare molto di più . Innanzitutto , è facile riconoscere (come già proposto a titolo di esercizio in II.1.) , che in ciascun caso la sottoalgebra H di L formata dalle matrici diagonali (che ha dimensione n su F) è *autonormalizzante* , e quindi è torica massimale in L . In secondo luogo , ogni elemento non-diagonale della base standard genera uno spazio radicale (relativamente a H) . In altre parole , la base standard prodotta in I.2. esibisce una decomposizione di Cartan di L . E' allora possibile descrivere esplicitamente il sistema di radici di L , scegliere in esso un sistema fondamentale , e riconoscere mediante il calcolo esplicito degli interi di Cartan che è del tipo richiesto .

Analizziamo i singoli casi che si presentano :

A_n : La base standard per $sl(n+1,F)$ è costituita dalle matrici diagonali $h_i = e_{ii} - e_{i+1,i+1}$ $(1 \le i \le n)$, e dalle matrici e_{ij} , con $i \ne j$. Per ogni $h = diag(a_1 , \dots , a_{n+1}) \in sl(n+1,F)$, si ha $[h,e_{ij}] = (a_i - a_j)e_{ij}$. Dunque Φ è costituito dalle forme lineari $\alpha : h \to a_i - a_j$ $(i \ne j)$. Si riconosce subito che le radici $\alpha_1 : h \to a_1 - a_2 , \dots , \alpha_n : h \to a_n - a_{n+1}$ formano un sistema fondamentale Π in Φ . Infatti ogni altra radice ha la forma $\alpha = \pm(\alpha_i + \dots + \alpha_j)$, $i < j$. Donde si deduce anche che $\alpha_i + \alpha_{i+1} \in \Phi$, mentre $\alpha_i + 2\alpha_{i+1} \notin \Phi$, e $\alpha_i + \alpha_j \notin \Phi$ se $i < j - 1$. Ne segue (cfr. III.9.Proposizione 4) che $A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = -1$, e $A_{ij} = A_{ji} = 0$ per $i < j - 1$. Si conclude che Φ è un sistema di radici di tipo **A_n** .

B_n : Consideriamo la base standard per $o(2n+1,F)$. Essa contiene le n matrici diagonali $h_i = e_{ii} - e_{n+i,n+i}$ $(2 \le i \le n+1)$, che formano una base per la sottoalgebra H delle matrici diagonali contenute in $o(2n+1,F)$. Ogni $h \in H$ ha la forma $diag(0 , a_2 , \dots , a_{n+1} , -a_2 , \dots , -a_{n+1})$. Si calcolano come sopra le radici corrispondenti ai vettori non-diagonali della base standard . Si ottiene Φ , che risulta costituito dalle seguenti forme lineari (in accordo all'ordinamento dato alla base standard) : $h \to a_{i+1}$, $h \to - a_{i+1}$ $(1 \le i \le n)$, $h \to a_{i+1} - a_{j+1}$ $(1 \le i \ne j \le n)$, $h \to a_{i+1} + a_{j+1}$ $(1 \le i < j \le n)$, $h \to -(a_{i+1} + a_{j+1})$ $(1 \le j < i \le n)$. E' facile allora riconoscere che le radici $\alpha_1 : h \to a_2 - a_3 , \dots , \alpha_{n-1} : h \to a_n - a_{n+1}$, $\alpha_n : h \to a_{n+1}$ formano un sistema fondamentale Π in Φ , che il calcolo degli interi di Cartan mostra essere di tipo **B_n** .

C_n : Consideriamo la base standard per $sp(2n,F)$. Essa contiene le n matrici diagonali $h_i = e_{ii} - e_{n+i,n+i}$ $(1 \le i \le n)$, che formano una base per la sottoalgebra H delle matrici diagonali contenute in $sp(2n,F)$. Ogni $h \in H$ ha dunque la forma $diag(a_1 , \dots , a_n , -a_1 , \dots , -a_n)$. Si calcolano le radici corrispondenti ai vettori non-diagonali della base standard , e si ottiene Φ , che risulta costituito dalle seguenti forme lineari : $h \to a_i - a_j$ $(1 \le i \ne j \le n)$, $h \to 2a_i$ $(1 \le i \le n)$, $h \to a_i + a_j$ $(1 \le i < j \le n)$, $h \to - 2a_i$ $(1 \le i \le n)$, $h \to -(a_i + a_j)$ $(1 \le i < j \le n)$. E' facile allora riconoscere che le radici $\alpha_1 : h \to a_1 - a_2 , \dots , \alpha_{n-1} : h \to a_{n-1} - a_n$, $\alpha_n : h \to 2a_n$ formano un sistema fondamentale Π in Φ , che il calcolo degli interi di Cartan mostra essere di tipo **C_n** .

D_n : Consideriamo la base standard per $o(2n,F)$. Essa contiene le n matrici diagonali $h_i = e_{ii} - e_{n+i,n+i}$ $(1 \le i \le n)$, che formano una base per la sottoalgebra H delle matrici diagonali contenute in $o(2n,F)$. Ogni $h \in H$ ha dunque la forma $diag(a_1 , \dots , a_n , -a_1 , \dots , -a_n)$. Si calcolano le radici corrispondenti ai vettori non-diagonali della base standard , e si ottiene Φ , che risulta costituito dalle seguenti forme lineari : $h \to a_i - a_j$ $(1 \le i \ne j \le n)$, $h \to a_i + a_j$ $(1 \le i < j \le n)$, $h \to -(a_i + a_j)$ $(1 \le j < i \le n)$. E' facile riconoscere che le radici $\alpha_1 : h \to a_1 - a_2 , \dots , \alpha_{n-1} : h \to a_{n-1} - a_n$, $\alpha_n : h \to a_{n-1} + a_n$ formano un sistema fondamentale Π in Φ , che il calcolo degli interi di Cartan mostra essere di tipo **D_n** .

C) L'algebra semplice di tipo G_2

Vi sono vari modi per costruire un'algebra di Lie di tipo $\mathbf{G_2}$. Il metodo più consueto, e concettualmente interessante , anche in relazione alla costruzione delle altre algebre "eccezionali" , è quello di costruirla come algebra delle derivazioni dell'algebra (non-associativa , 8-dimensionale) degli *ottetti* (octonions) *di Cayley* sul campo F . (Cfr. Jacobson , loc. cit. , o J. E. Humphreys "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory", p. 104 .)
Un altro modo , molto diretto ed economico (proposto da Humphreys , loc.cit. , e ricavato da un'esposizione del "Séminaire Sophus Lie" del 1954/55) sfrutta il fatto , noto per altra via , che l'algebra semplice di tipo $\mathbf{G_2}$ ammette una rappresentazione di grado minimale 7 sul campo F , mediante matrici appartenenti all'algebra ortogonale $\mathbf{B_3} = o(7,F)$. $\mathbf{B_3}$ ha dimensione 21 , mentre $\mathbf{G_2}$ ha dimensione 14 su F , e si può cercare di costruirla direttamente come sottoalgebra dell'algebra ortogonale a partire da una decomposizione di Cartan di $\mathbf{B_3}$.
Consideriamo dunque in $\mathbf{B_3}$ la base standard , e denotiamo con H_0 la sottoalgebra torica massimale $< h_1 , h_2 , h_3 >$ generata da $h_1 = e_{22} - e_{55}$, $h_2 = e_{33} - e_{66}$, $h_3 = e_{44} - e_{77}$. Come candidata ad essere una sottoalgebra torica massimale (di dimensione 2) di $\mathbf{G_2}$, scegliamo la sottoalgebra di H_0 : $H = < \Sigma a_i h_i \mid \Sigma a_i = 0 >$.
In corrispondenza alle sei radici lunghe del sistema $\mathbf{G_2}$ (che formano , come si può verificare , un sistema di tipo $\mathbf{A_2}$) scegliamo in $\mathbf{B_3}$ gli spazi radicali (relativi a H_0) generati dai vettori $g_{i,-j}$ $(1 \le i \ne j \le 3)$ così definiti :

$$g_{1,-2} = {}^t g_{2,-1} = e_{23} - e_{65}$$
$$g_{1,-3} = {}^t g_{3,-1} = e_{24} - e_{75}$$
$$g_{2,-3} = {}^t g_{3,-2} = e_{34} - e_{76}$$

(ove "t" denota la trasposizione) .
In corrispondenza alle radici corte del sistema $\mathbf{G_2}$, scegliamo invece come vettori radicali i vettori $g_{\pm i}$ (i = 1 , 2 , 3) così definiti :

$$g_1 = -{}^t g_{-1} = \sqrt{2}(e_{12} - e_{51}) - (e_{37} - e_{46})$$
$$g_2 = -{}^t g_{-2} = \sqrt{2}(e_{13} - e_{61}) + (e_{27} - e_{45})$$
$$g_3 = -{}^t g_{-3} = \sqrt{2}(e_{14} - e_{71}) - (e_{26} - e_{35})$$

Sono in tutto 12 vettori indipendenti , che insieme a H generano un sottospazio 14-dimensionale di $\mathbf{B_3}$. Si verifica immediatamente che ciascuno di essi è un autovettore comune a tutti gli elementi di ad H , e *non centralizza* H . In altre parole , ciascuno di essi è associato a una forma lineare non-nulla di H su F , e dunque è un buon candidato a fungere da generatore di uno spazio radicale per l'algebra $\mathbf{G_2}$.
Sia $L = < H , g_{i,-j} , g_{\pm i} >$ $(1 \le i \ne j \le 3)$. Si verifica senza troppa pena che il sottospazio L è chiuso rispetto al bracket in $\mathbf{B_3}$, e dunque è una sottoalgebra di Lie di $\mathbf{B_3}$. Si ha precisamente :

$$[g_{i,-j} , g_{k,-l}] = \delta_{jk} g_{i,-l} - \delta_{il} g_{k,-j}$$
$$[g_i , g_{-i}] = 3h_i - (h_1 + h_2 + h_3)$$
$$[g_{i,-j} , g_k] = -\delta_{ik} g_j$$
$$[g_{i,-j} , g_{-k}] = \delta_{jk} g_{-i}$$
$$[g_i , g_{-j}] = 3g_{j,-i} \quad (i \ne j)$$
$$[g_i , g_j] = \pm 2g_{-k} \ ; \ [g_{-i} , g_{-j}] = \pm 2g_k \quad (i,j,k \text{ distinti}) \quad (*)$$

(I segni in (*) essendo determinati dalle relazioni : $[g_1 , g_2] = 2g_{-3}$; $[g_1 , g_3] = -2g_{-2}$; $[g_2 , g_3] = 2g_{-1}$, e dalle analoghe riguardanti le trasposte.)

Poichè , per quanto osservato sopra , H è autocentralizzante in L , segue che H è torica massimale in L . Basterà dunque verificare che L è semisemplice per concludere che H dà luogo a una decomposizione di Cartan , con spazi radicali generati dai vettori $g_{i,-j}$, $g_{\pm i}$. La classificazione dei sistemi di radici (di rango 2!) ci assicura allora finalmente che L è effettivamente di tipo G_2 .

Ora , L è contenuta in B_3 , e quindi consiste di matrici di traccia zero . Pertanto , in forza della Proposizione 1 della sezione A) , per provare che L è semisemplice ci basta verificare che L opera irriducibilmente sullo spazio $V = F^7$. Sia dunque $\underline{0} \neq U$ un sottospazio di V invariante per l'azione di L , e sia $(v_0 , v_1 , v_2 , v_3 , v_{-1} , v_{-2} , v_{-3})$ la base standard di V . Osserviamo che $h = \mathrm{diag}(0 , 1 , 2 , -3 , -1 , -2 , 3) = h_1 + 2h_2 - 3h_3$ è un elemento di H . Allora U è h-invariante , e poichè h ha tutti gli autovalori distinti , corrispondenti agli autospazi generati dai vettori della base standard , ne segue che U contiene almeno uno dei vettori di tale base (si osservi che $h|_U$ è diagonalizzabile , e i suoi autospazi sono autospazi per h) . Dopo di ciò, si osserva che $g_{\pm i}(v_0)$ è un multiplo di $v_{\mp i}$, $g_{\pm i}(v_{\pm i})$ è un multiplo di v_0 $(i = 1 , 2 , 3)$, $g_{\pm i}(v_{\pm j})$ è un multiplo di $v_{\pm k}$ (i , j , k distinti) , e infine $g_{i,-j}(v_j) = v_i$, $g_{i,-j}(v_{-i}) = -v_{-j}$. Si conclude che , se U contiene un vettore della base standard di V , allora li contiene tutti , e dunque U = V.